



Cours

Etude fréquentielle

C.P.G.E
T.S.I.

1. INTRODUCTION

L'étude fréquentielle d'un système asservi linéaire se fera sur la fonction de transfert en **boucle ouverte**. Cette étude permettra néanmoins d'exprimer certaines caractéristiques essentielles (ex : la stabilité) du système bouclé.

Contrairement à l'étude temporelle, seul le régime établi (régime forcé) de la sortie $s(t)$ sera étudié.

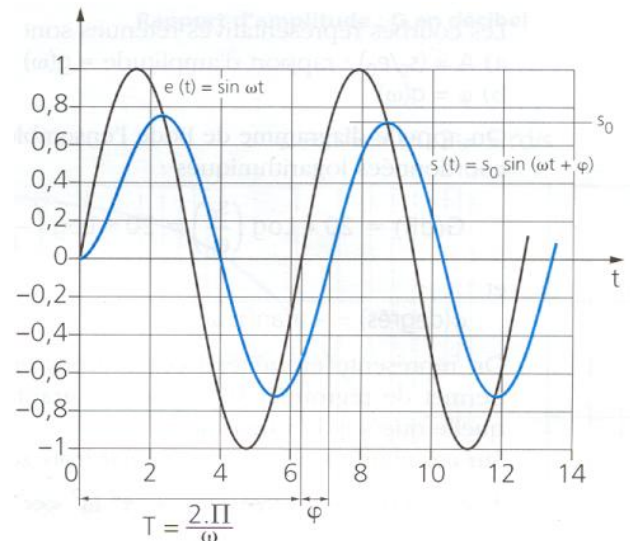
On fera abstraction du régime transitoire.

2. DEFINITION DE LA REPONSE HARMONIQUE

2.1. Réponse harmonique

Soit un système linéaire continu et invariant de fonction de transfert $H(p)$ soumis à une entrée $e(t) = e_0 \sin \omega t$.

L'équation de la sortie en régime permanent sera de la forme $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$ comme décrit ci-contre :



2.2. Définition de la transmittance

Si on pose pour l'opérateur de Laplace $p = j\omega$, on peut exprimer dans le domaine complexe la fonction de transfert $H(j\omega)$ appelée aussi transmittance. On définira alors :

- Le rapport d'amplitude :
- Le déphasage :

Remarque : Le rapport d'amplitude G est communément appelé gain. Mais il ne faut pas le confondre avec le gain statique K du système.

3. DIAGRAMME DE BODE

3.1. Système du premier ordre

La fonction de transfert d'un système du 1^{er} ordre est : $H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$, soit $H(j\omega) = \frac{K}{1+j\tau\omega}$,

Alors $G = \left| \frac{K}{1+j\tau\omega} \right| = \frac{K}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$, et $\phi = \arg\left(\frac{K}{1+j\tau\omega}\right) = -\arctan(\tau\omega)$.

On appellera **diagramme de Bode** l'ensemble des deux courbes de gain $G(\text{dB})$ et de phase $\phi(\text{degrés})$ comme définies ci-dessous en fonction de la pulsation ω représentée en abscisse logarithmique.

$$G_{(\text{dB})} = \dots$$

$$\phi_{(\text{degrés})} = \dots$$

Remarque : dB symbolise des décibels.

On pourra alors distinguer trois zones :

▪ **Zone de basses fréquences :**

-
-

▪ **Zone de hautes fréquences :**

- $G \rightarrow$

ce qui correspond en coordonnées logarithmiques à l'équation d'une droite de pente -20 dB/décade (-20 décibels lorsque l'on multiplie ω par 10). Cette droite correspondra à l'asymptote finale de $G_{(dB)}$.

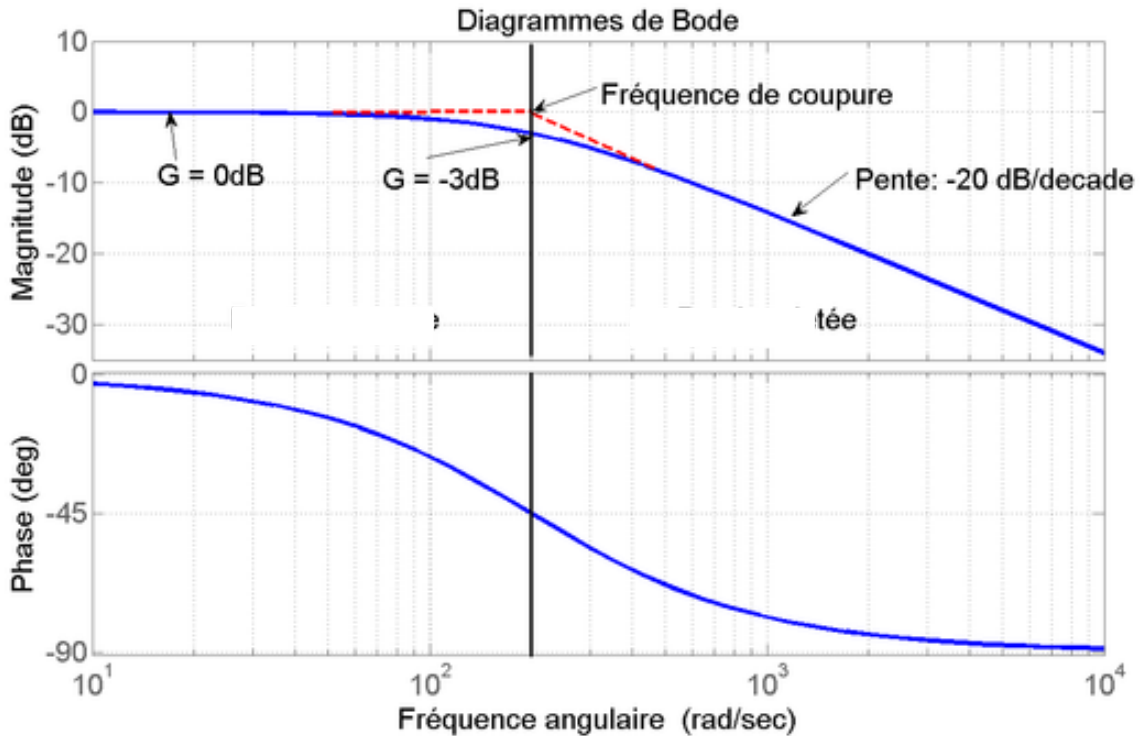
- $\phi \rightarrow$
- Ces 2 asymptotes se coupent en appelée pulsation de coupure ω_c

▪ **Zone de moyenne fréquence :**

-

ce qui correspond à une chute de -3 db par rapport au domaine des basses fréquences

- $\phi \rightarrow -45^\circ$



3.2. Système du second ordre

La fonction de transfert d'un système du 2nd ordre est :
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On retrouvera en représentation de Bode :

On peut alors distinguer trois zones :

▪ **Zone de basses fréquences**

▪ Zone de hautes fréquences :

•

ce qui correspond en coordonnées logarithmiques à l'équation d'une droite de pente -40 dB/décade (-40 décibels lorsque l'on multiplie ω par 10). Cette droite correspondra à l'asymptote finale de $G_{(dB)}$.

• $\phi \rightarrow$

▪ Zone de moyennes fréquences :

•

•

Le comportement du système dépendra alors de la valeur du coefficient d'amortissement :

•

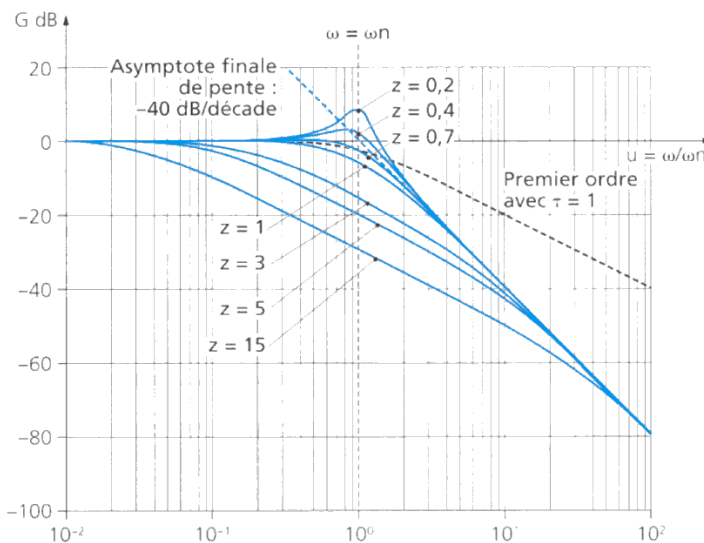
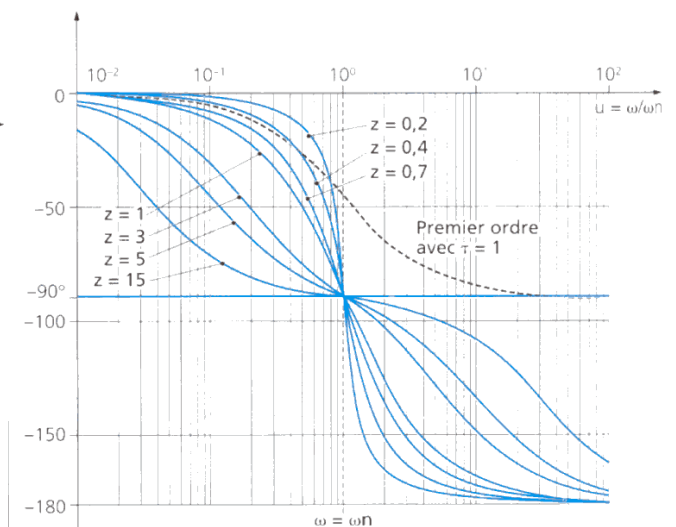
•

Le maximum se produira pour une pulsation ω_R appelée pulsation de résonance.

ω_R est définie lorsque G est maximum, soit lorsque sa dérivée s'annule :

On montre que c'est pour $\omega = 0$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$: la pulsation de résonance est donc $\omega_R = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$

On définit le **coefficient de surtension** est : $Q_S = \frac{G(\omega_r)}{G(0)} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$



Remarque : Dans le cas où $\xi > 1$, on peut factoriser la fonction de transfert du 2nd ordre :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}p + \frac{p^2}{\omega_n^2}} =$$

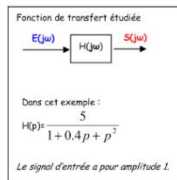
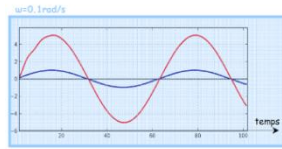
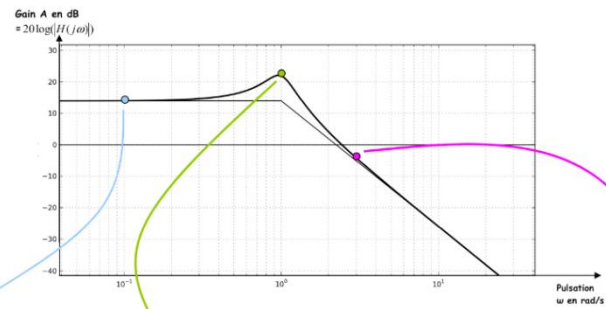
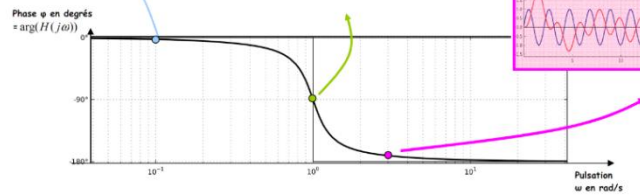
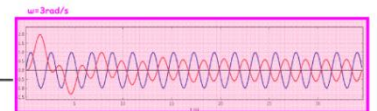
et l'étude dans le plan de Bode pourra se résumer à la sommation de deux 1^{er} ordre en phase et en gain :

$$G_{(db)} = 20 \cdot \log \left| \frac{K'}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \right| = 20 \cdot \log \left| \frac{K'}{(1 + \tau_1 p)} \right| + 20 \cdot \log \left| \frac{1}{(1 + \tau_2 p)} \right|$$

et $\phi_{(deg)} = \arg \left(\frac{K'}{(1 + \tau_1 p)} \right) + \arg \left(\frac{1}{(1 + \tau_2 p)} \right)$.

Cette propriété très intéressante sera mise en évidence dans les différentes applications...

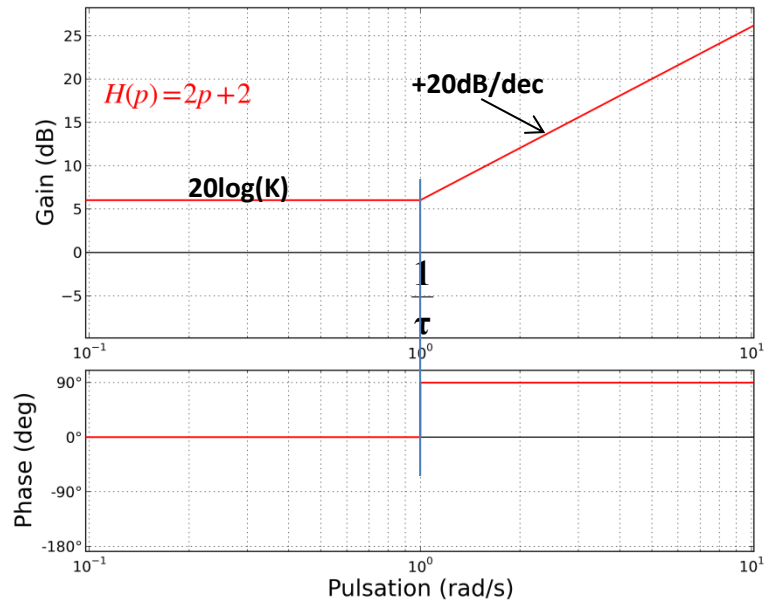
ANNEXES



TRACE DES DIAGRAMMES ASYMPTOTIQUES DE BODE

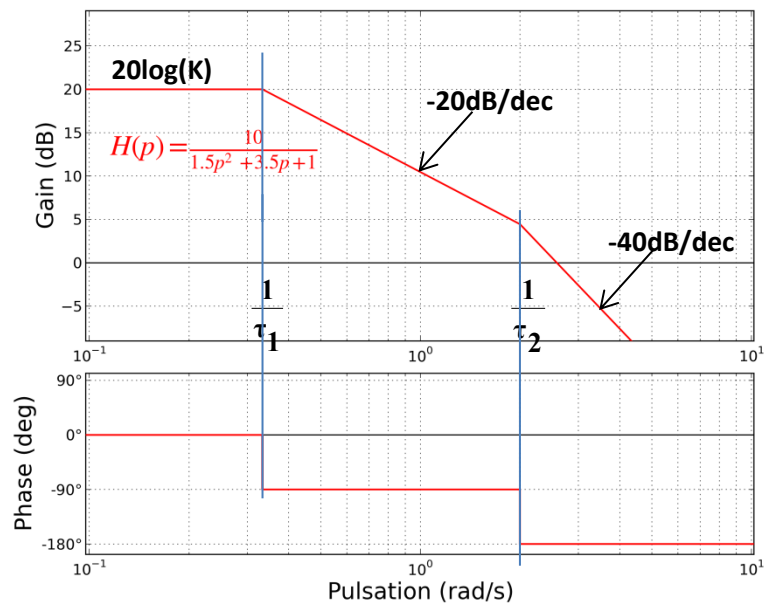
Fonction de transfert	Diagramme de bode
$H(p) = \frac{K}{p}$	<p>Gain (dB)</p> <p>Phase (deg)</p> <p>Pulsation (rad/s)</p> <p>$H(p) = \frac{K}{p}$</p>
$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$	<p>Gain (dB)</p> <p>Phase (deg)</p> <p>Pulsation (rad/s)</p> <p>$H(p) = \frac{10}{2p+1}$</p> <p>$20\log(K)$</p> <p>-20dB/dec</p>

$$H(p) = K(1 + \tau p)$$

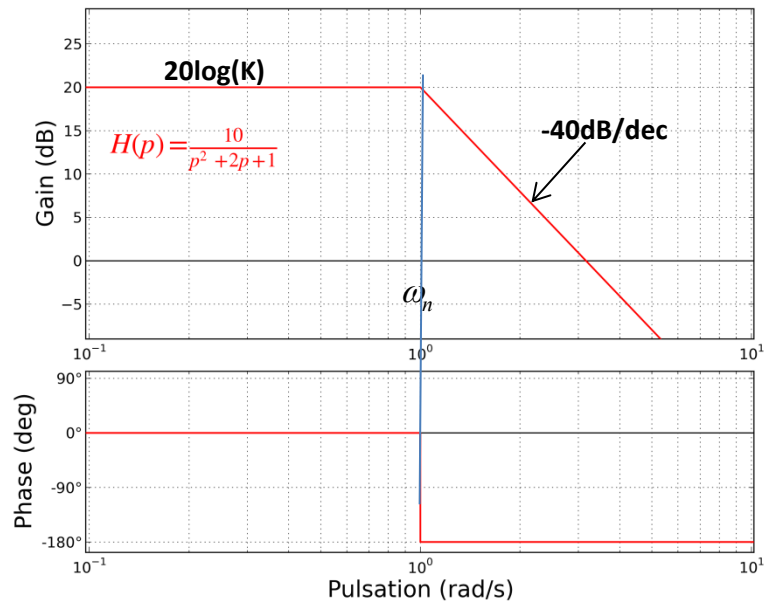


$$\text{Si } \xi > 1$$

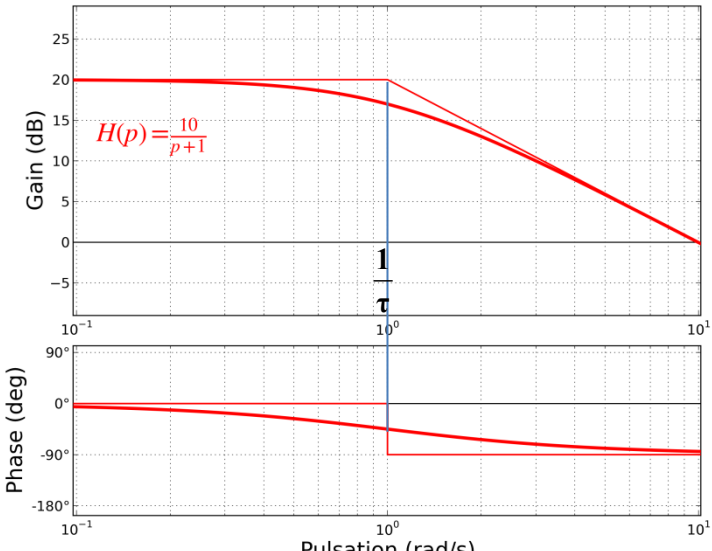
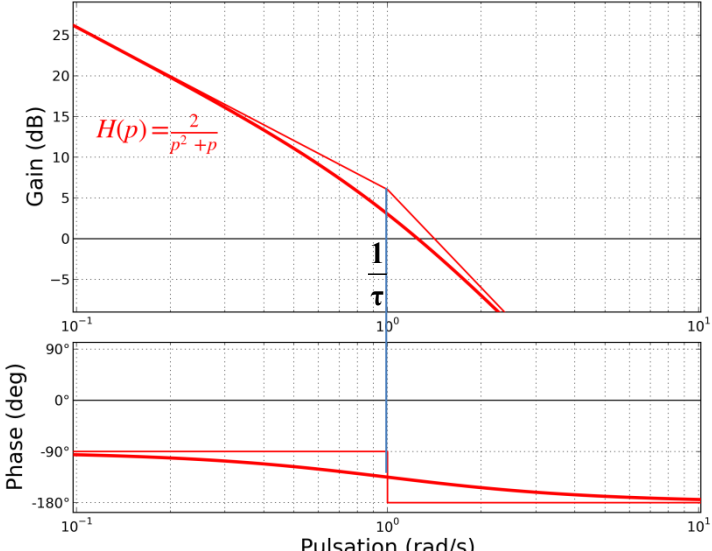
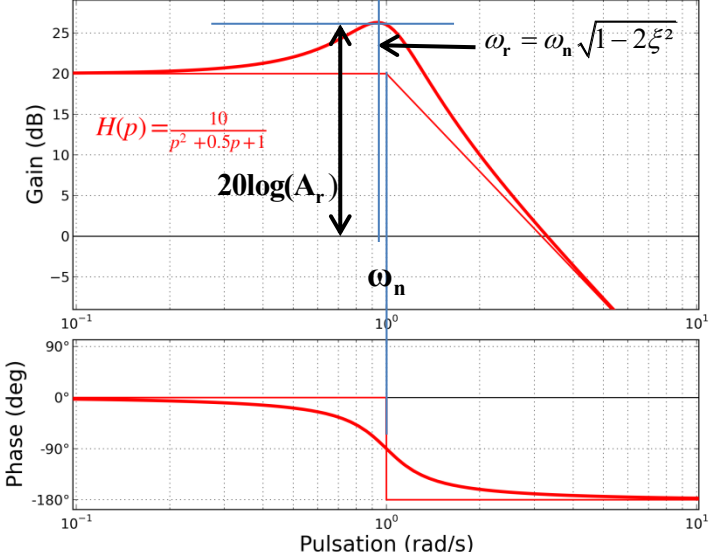
$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$



$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$



IDENTIFICATION DIAGRAMMES DE BODE RELEVES EXPERIMENTALEMENT

Diagrammes de bode relevés expérimentalement	Modèle de représentation sous forme de transmittance
 <p>Gain (dB)</p> <p>Phase (deg)</p> <p>Pulsation (rad/s)</p> <p>$H(p) = \frac{10}{p+1}$</p> <p>$\frac{1}{\tau}$</p>	$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$ <p>K est relevé sur la courbe de gain en basse fréquence (zone de pente nulle)</p> <p>$\frac{1}{\tau}$ est relevé sur la courbe de phase (valeur -45°) ou sur le diagramme de gain (intersection des asymptotes)</p>
 <p>Gain (dB)</p> <p>Phase (deg)</p> <p>Pulsation (rad/s)</p> <p>$H(p) = \frac{2}{p^2 + p}$</p> <p>$\frac{1}{\tau}$</p>	$H(p) = \frac{K}{p(1 + \tau p)}$ <p>K est relevé sur la courbe de gain pour une valeur ω_0, fixée en basse fréquence.</p> <p>$\frac{1}{\tau}$ est relevé sur la courbe de phase (valeur -135°)</p>
 <p>Gain (dB)</p> <p>Phase (deg)</p> <p>Pulsation (rad/s)</p> <p>$H(p) = \frac{10}{p^2 + 0.5p + 1}$</p> <p>$20\log(A_r)$</p> <p>$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$</p> <p>$\omega_n$</p>	$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$ <p>K est relevé sur la courbe de gain en basse fréquence, dans la zone où la pente est nulle.</p> <p>ω_n est déterminée par la mesure de la pulsation où la phase atteint -90°.</p> <p>ξ est déterminé par la mesure de $A_r = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$</p>