



Cours Représentation

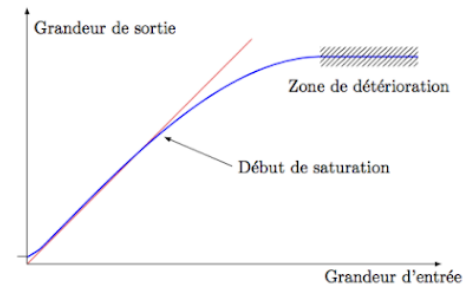
C.P.G.E
T.S.I.

1. INTRODUCTION

L'étude des systèmes asservis se limitera en C.P.G.E. aux cas des SCLI : **Systèmes Linéaires, Continus et Invariants**, soit à des Systèmes :

Linéaires : La relation entre la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie s'exprime par une équation différentielle à coefficients constants (*limitation aux systèmes modélisables par des équations différentielles*

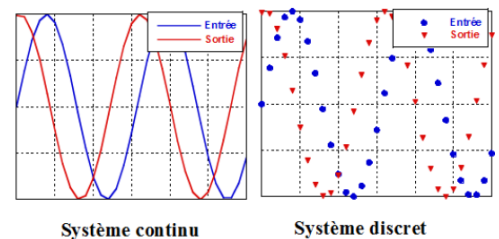
du 1^{er} ou 2nd ordre.), soit :
$$\sum_{i=0}^n A_i \frac{d^i s(t)}{dt^i} = \sum_{j=0}^n B_j \frac{d^j e(t)}{dt^j}$$



Le système étant linéaire, nous pouvons appliquer le **principe de superposition** : Soient deux entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$ donnés et $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les sorties correspondantes :

Continus : L'observation et la commande sont réalisées de manière continue dans le temps. Ceci implique que l'entrée et la sortie soient des fonctions continues du temps.

Remarque : En pratique, cette condition est rarement respectée (notamment dans les asservissements numériques échantillonnés). Cependant, même s'il convient d'être prudent, on l'acceptera systématiquement comme une bonne approximation.

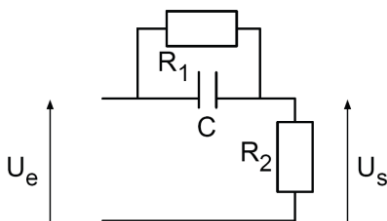


Invariants : Les caractéristiques des systèmes étudiés sont indépendantes du temps. Deux mesures identiques effectuées à des instants différents donneront le même résultat. Le facteur d'usure n'est pas pris en compte.

2. EXEMPLES

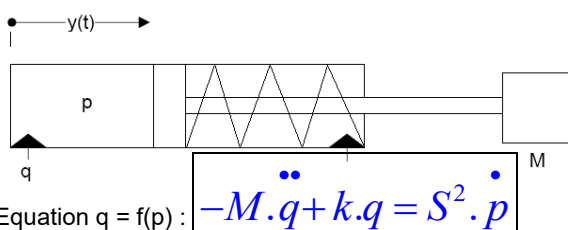
Les SLCI sont des systèmes physiques :

2.1. Exemple électrique : filtre à avance de phase



Equation $U_s = f(U_e)$:

2.2. Exemple hydraulique : Déplacement d'un vérin.

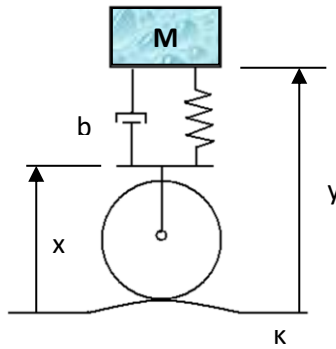


□ Hypothèses : Repère galiléen, frottements secs négligés et fluide considéré comme incompressible.

□ Données : **S** est la section du piston, **k** la raideur du ressort, **q** le débit, **p** la pression relative d'alimentation et **M** la masse de l'équipage mobile.

□ Equation $q = f(p)$: $-M.\ddot{q} + k.q = S^2.p$

2.3. Exemple mécanique : Amortisseur de voiture.



□ Equation $y = f(x)$, autour du point d'équilibre,

:

3. TRANSFORMATION DE LAPLACE

Pierre-Simon LAPLACE, illustre mathématicien Français (1749-1827), qui produira entre autres des travaux sur le calcul intégral, les probabilités et le calcul différentiel. C'est sur ce dernier point qu'il définira la fonction portant son nom, étude complétée plus tard par Oliver HEAVISIDE.



3.1. Définition

La transformation de Laplace associe à toute fonction $f(t)$ définie pour $t > 0$, la fonction $F(p)$ de variable complexe $p = a + ib$ appelée transformée de Laplace de $f(t)$ et définie par :

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

On note : $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ soit $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$

Les conditions d'existence de la transformée de Laplace sont : $f(t)$ intégrable et e^{-pt} convergente.

Remarque : Cette transformée ne tient pas compte des événements pour $t < 0$. Par conséquent, « l'outil transformée de Laplace » est intéressant pour des **fonctions causales** (condition initiales $t < 0$ nulles : majorité des cas en asservissement).

3.2. Propriétés

Linéarité :

Dérivation :

Intégration :

Conclusion :

3.3. Théorème de la valeur finale

Remarque : Ce théorème suppose que les pôles de $pF(p)$ (racines du dénominateur) soient à partie réelle négative.

3.4. Théorème de la valeur initiale

Remarque : Ce théorème suppose que le degré de $N(p)$ soit inférieur ou égale à celui de $D(p)$ avec $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$.

3.5. Théorème du retard

Tableau récapitulatif des transformées usuelles

$f(t)$ pour $t > 0$	$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$
$a \cdot u(t)$	
$\delta(t) \cdot u(t)$	
$a \cdot t \cdot u(t)$	
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p^n}$
$e^{-at} \cdot u(t)$	
$t \cdot e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$\cos(\omega \cdot t) \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-a \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-a \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$

Remarque : Ce tableau n'est en aucun cas à apprendre par cœur, mais il y a des incontournables

4. TRANSFORMATION DE LAPLACE

Si on applique les transformées de Laplace aux équations différentielles des systèmes asservis, on obtient alors une représentation polynomiale simple de ces équations, soit :

$$\sum_{i=0}^n A_i \cdot p^i \cdot S(p) = \sum_{j=0}^m B_j \cdot p^j \cdot E(p)$$

avec $S(p) = \mathcal{L}(s(t))$ et $E(p) = \mathcal{L}(e(t))$

Remarque : Conditions initiales nulles

5. FONCTION DE TRANSFERT

On pourra alors exprimer simplement la **fonction de transfert du système** notée $H(p)$ et définie par :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{j=0}^m B_j \cdot p^j}{\sum_{i=0}^n A_i \cdot p^i}$$

5.1. Forme canonique d'une fonction de transfert

La forme « 1+... » au dénominateur est dite forme canonique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{j=0}^m d_j \cdot p^j}{1 + \sum_{i=1}^n c_i \cdot p^i}$$

Pour obtenir la forme canonique, il suffit de diviser le numérateur et le dénominateur par A_0

5.2. Ordre et Classe d'une fonction de transfert

Toute fonction de transfert peut alors prendre la forme suivante :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{p^\alpha} \cdot \frac{d_0 + d_1 \cdot p + d_2 \cdot p^2 + \dots + d_j \cdot p^j + \dots + d_m \cdot p^m}{1 + c_0 + c_1 \cdot p + c_2 \cdot p^2 + \dots + c_i \cdot p^i + \dots + d_n \cdot p^n}$$

On appelle α **classe** de la fonction de transfert.

On appelle $\alpha + n$ **ordre** de la fonction de transfert.

5.3. Fonction de transfert du 1^{er} ordre

Une fonction de la forme $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b}{a_0 + a_1 \cdot p}$ est dite du 1^{er} ordre.

Forme canonique d'un 1^{er} ordre

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} =$$

5.4. Fonction de transfert du 2^{ème} ordre

Une fonction de la forme $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b}{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}$ est dite du 1^{er} ordre.

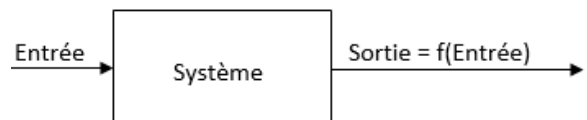
Forme canonique d'un 2^{ème} ordre :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} =$$

6. NOTIONS DE SCHEMA BLOC ET DE FONCTION DE TRANSFERT

Un système a une (ou plusieurs) entrée(s) et une (ou plusieurs) sortie(s).

Le système est représenté par un bloc qui transforme l'(les) entrée(s) en la(les) sortie(s).



La sortie est fonction de l'entrée. On appelle la **fonction de transfert** la fonction qui permet de calculer la sortie en fonction de l'entrée. Elle est souvent notée H.

Attention : pour parler de fonction de transfert, il est nécessaire qu'il n'y ait qu'une entrée, et une sortie. S'il y a plusieurs entrées ou/et plusieurs sorties, on en peut pas parler de fonction de transfert.

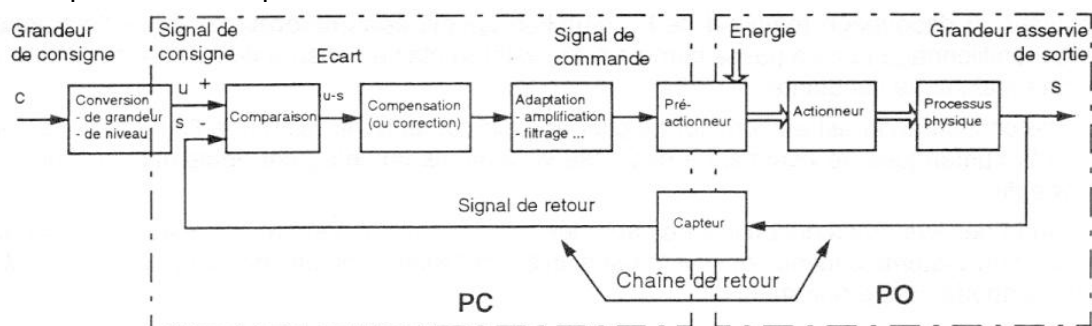
Les entrées et les sorties sont des grandeurs dépendant du temps. On peut donc écrire :

$$H(t) = \frac{\text{Sortie}(t)}{\text{Entrée}(t)} = \frac{s(t)}{e(t)} \text{ et en utilisant la transformée de Laplace : } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \quad \heartsuit$$

$$t \rightarrow p \text{ (ou } s) \quad e(t) \rightarrow E(p) \quad s(t) \rightarrow S(p)$$

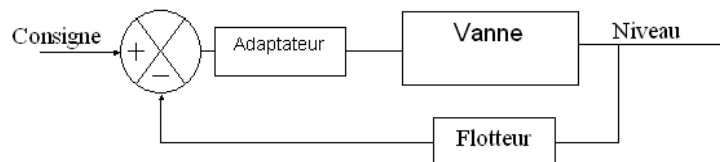
7. REPRESENTATION D'UN SYSTEME SOUS FORME DE SCHEMA BLOC

Un schéma bloc peut se décomposer en sous-schéma blocs :



Attention au sens des flèches.

Chaque composant du système peut être modélisé par un bloc agencé dans un schéma (bloc).
Les grandeurs physiques sont transmises par les fils.



L'élément  est un comparateur qui réalise une opération mathématique entre 2 grandeurs.

Ici, le comparateur réalise l'opération $+ \text{Consigne} - \text{la grandeur qui sort du bloc flotteur}$.

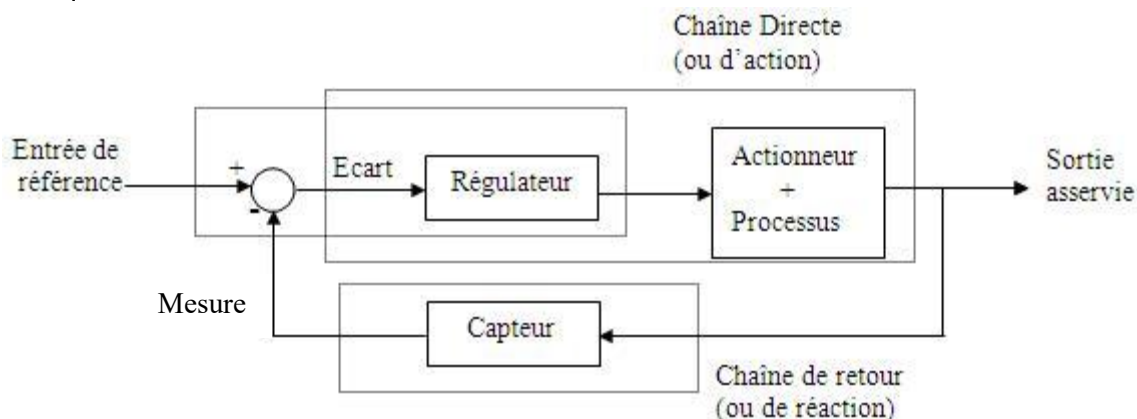
Attention : il est impératif que les grandeurs arrivant au comparateur soit de même nature (même unité).
La sortie est également de même nature et a la même unité.

Il existe des comparateurs :

- à 2 entrées (le plus courant), à 3 entrées (plus rare) ou à plus que 3 entrées (on n'en verra jamais)
- à opération $+/+$ ou à opération $+/-$ ou à opération $-/+$ ou à opération $-/-$ ou à opération $+/-/-$ ou ...

8. FORME DE SCHEMA BLOC

Les systèmes que nous étudierons seront souvent bouclés :



8.1. Chaîne directe

La **chaîne de retour** (ici, Capteur) n'est pas toujours présente.

Dans ce cas, le schéma bloc se résume à une **chaîne directe** (ici, Régulateur + Actionneur + Processus)

8.2. Chaîne bouclée

Lorsque la chaîne de retour existe, le système est dit **bouclé**.

8.2.1. Fonction de transfert en boucle fermée (F.T.B.F.)

En boucle fermée, l'entrée du système et la sortie du système sont facilement identifiables. Ici, l'entrée est l'entrée de référence (que l'on notera $E(p)$) et la sortie est appelée sortie asservie que l'on notera $S(p)$.

La **fonction de transfert en boucle fermée (F.T.B.F.)** sera donc $H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$

8.2.2. Fonction de transfert en boucle ouverte (F.T.B.O.)

En boucle ouverte, on modifie le système en supprimant le comparateur et tout ce qu'il y a devant.

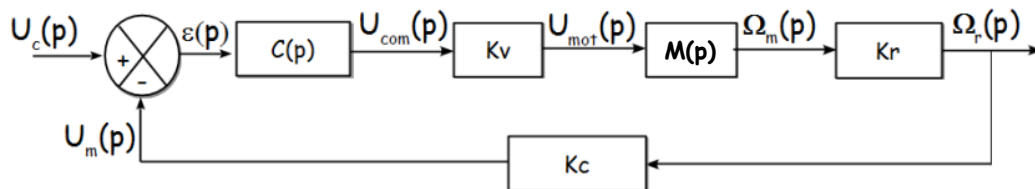
L'entrée du système devient l'écart (que l'on notera $\varepsilon(p)$) et la sortie du système devient l'entrée du comparateur de la chaîne de retour (ici la mesure que l'on notera $M(p)$).

La **fonction de transfert en boucle ouverte (F.T.B.O.)** sera donc celle d'une chaîne directe : $H_{BO}(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$

9. CALCUL DE LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SCHEMA BLOC

9.1. Schéma bloc à une entrée et une sortie

Soit le schéma suivant :



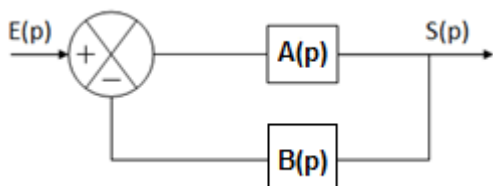
$U_c(p)$ est l'entrée $\Omega_r(p)$ est la sortie

$\varepsilon(p)$, $U_{com}(p)$, $U_{mot}(p)$, $\Omega_m(p)$, $U_m(p)$ sont des grandeurs intermédiaires.

Formule de BLACK

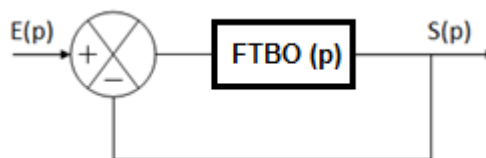
Nota : à l'usage, il est pratique plus d'utiliser **2 techniques dérivées** de la formule de Black :

Situation 1 : cas fréquent



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = FTBF(p) = \frac{A(p)}{1+FTBO(p)}$$

Situation 2 : retour unitaire

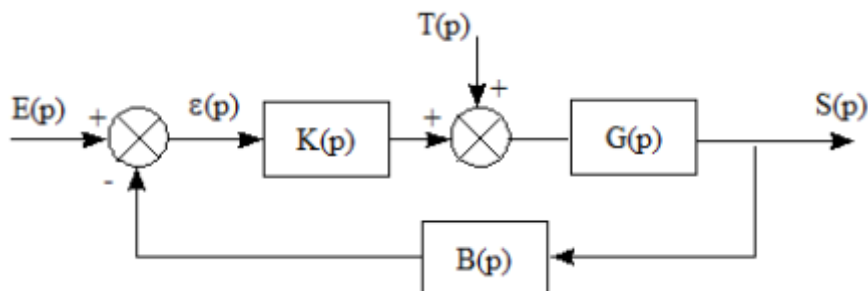


$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = FTBF(p) = \frac{FTBO(p)}{1+FTBO(p)}$$

On réservera la méthode directe aux cas complexes.

9.2. Schéma bloc à deux entrées et une sortie

Dans le cas particulier où il y a plusieurs entrées, la fonction de transfert n'existe pas, mais on peut trouver, par un raisonnement similaire, une relation entre la sortie et les entrées.



9.2.1. Méthode directe (en général à éviter)

9.2.2. Théorème de superposition

9.3. *Ecriture finale*

Si les fonctions de transfert intermédiaires $G(p)$, $K(p)$, $B(p)$, ... sont des fonctions (polynomiales) de p , alors l'écriture finale de la fonction de transfert nécessite de les développer pour n'écrire que des fonctions

en p de la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\sum_{j=0}^m B_j \cdot p^j}{\sum_{i=0}^n A_i \cdot p^i}$$