



Cours Cinématique du solide

**C.P.G.E
T.S.I.**

1. CHAMP DES VITESSES D'UN SOLIDE

Si le mouvement de 2/1 est décrit par un **torseur cinématique** $\{V_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{M \in 2/1} \end{array} \right\}$

$\vec{\Omega}_{2/1}$: **Résultante cinématique**: Vecteur Rotation instantanée de 2 par rapport à 1.

Ne dépend pas du point considéré

$\vec{V}_{M \in 2/1}$: **Moment cinématique**: Vecteur Vitesse du point M, appartenant à 2, dans le mouvement de 2 par rapport à 1

Dépend du point considéré

Propriété fondamentale :

Alors on démontre que : $\vec{V}_{B \in 2/1} = \vec{V}_{A \in 2/1} + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$ ♥ **A SAVOIR**

Elle s'énonce : Moment en B égal moment en A plus le vecteur BA vectoriel la Résultante, Soit **BABAR**

On dit aussi que le champ des vitesses d'un solide est le *champ des moments d'un torseur* dont la résultante $\vec{\Omega}_{2/1}$ est le *vecteur rotation instantané*.

Deuxième écriture : Indication des composantes des vecteurs exprimées dans une base de référence

$$\{V_{2/1}\} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{array} \right) \\ M \end{array} \quad \text{avec} \quad \vec{\Omega}_{2/1} = \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{V}_{M \in 2/1} = V_x \vec{x} + V_y \vec{y} + V_z \vec{z}$$

$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

2. CHAMP DES ACCELERATIONS D'UN SOLIDE

Par dérivation par rapport au temps dans B_1 de la relation fondamentale des vitesses :

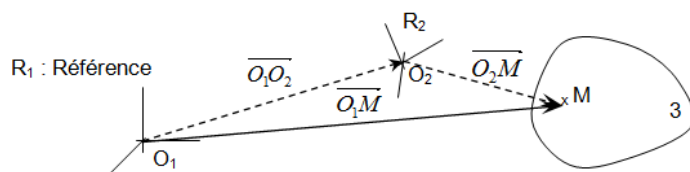
$$\left[\frac{d \vec{V}_{N \in 2/1}}{dt} \right]_1 = \left[\frac{d \vec{V}_{M \in 2/1}}{dt} \right]_1 + \left[\frac{d \vec{\Omega}_{2/1}}{dt} \right]_1 \wedge M \vec{N} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \left[\frac{d M \vec{N}}{dt} \right]_1, \quad \text{avec} \quad \left[\frac{d M \vec{N}}{dt} \right]_1 = \left[\frac{d M \vec{N}}{dt} \right]_2 + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge M \vec{N}$$

$$\vec{\Gamma}_{N \in 2/1} = \vec{\Gamma}_{M \in 2/1} + \left[\frac{d \vec{\Omega}_{2/1}}{dt} \right]_1 \wedge M \vec{N} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge (\vec{\Omega}_{2/1} \wedge M \vec{N}) \quad \text{puisque} \quad \left[\frac{d M \vec{N}}{dt} \right]_2 = \vec{0}$$

$$\vec{\Gamma}_{N \in 2/1} \neq \vec{\Gamma}_{M \in 2/1} + M \vec{N} \wedge \frac{d \vec{\Omega}_{2/1}}{dt} : \text{Il n'existe pas de torseur des accélérations.}$$

3. COMPOSITION DE MOUVEMENT

On considère le point M d'un solide 3 (repère R_3) *mobile* par rapport à R_2 lui-même *mobile* par rapport à R_1 .



$$\vec{V}_{M/1} = \vec{V}_{M/2} + \vec{V}_{M \in 2/1}$$

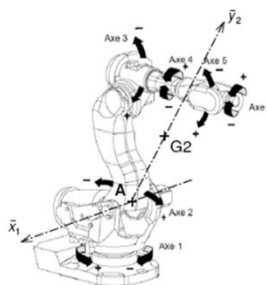
Vitesse absolue
Vitesse relative
Vitesse d'entraînement

Le mouvement de R_3 par rapport à R_1 est dit **absolu** ; Le mouvement de R_3 par rapport à R_2 est dit **relatif** ;

Le mouvement de R_2 par rapport à R_1 est dit **d'entraînement** ;

Ainsi, un mouvement complexe peut résulter de la composition de mouvements simples, avec deux solides en mouvement ou davantage.

Exemple : robot 6 axes



En mécanique du solide, on retiendra : $\vec{V}_{M \in 3/1} = \vec{V}_{M \in 3/2} + \vec{V}_{M \in 2/1}$ ♥ **A SAVOIR**

Conséquences sur les torseurs cinématiques de la composition de vitesses

Avec $\vec{\Omega}_{3/1} = \vec{\Omega}_{3/2} + \vec{\Omega}_{2/1}$, on a finalement : $\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{3/1} \\ \vec{V}_{A \in 3/1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{3/2} \\ \vec{V}_{A \in 3/2} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{A \in 2/1} \end{array} \right\}$

Soit ${}_A\{V_{3/1}\} = {}_A\{V_{3/2}\} + {}_A\{V_{2/1}\}$ **au même point**

Généralisation : ${}_A\{V_{n/1}\} = {}_A\{V_{n/n-1}\} + {}_A\{V_{n-1/n-2}\} + \dots + {}_A\{V_{3/2}\} + {}_A\{V_{2/1}\}$

Pour information :

L'accélération de Coriolis $\vec{\Gamma}_C = 2\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{V}_{M/2}$ est nulle

si : $\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{0}$ (translation) ou $\vec{V}_{M/2} = \vec{0}$ (pas de mouvement relatif) ou $\vec{\Omega}_{2/1}$ et $\vec{V}_{M/2}$ (colinéaires)

$$\vec{\Gamma}_{M/1} = \vec{\Gamma}_{M/2} + \vec{\Gamma}_{M \in 2/1} + 2\vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{V}_{M/2}$$

accélération absolue
accélération relative
accélération d'entraînement
accélération de Coriolis

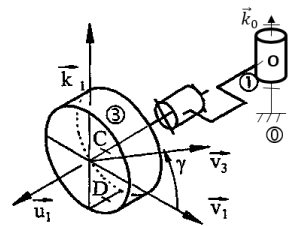
4. SYNTHESE DES OUTILS

❑ **Utiliser la dérivée du vecteur position** peut s'avérer vite « **dangereux** » dans le choix du vecteur à dériver

(exemple ci contre : $\vec{V}_{D \in 3/1} = \left(\frac{d\vec{CD}}{dt} \right)_{R1} = \left(\frac{d(-r\vec{k}_1)}{dt} \right)_{R1} = \vec{0}$ est Faux !!)

⇒ **A réserver aux cas évidents** (1 angle de rotation : ici $\vec{V}_{C \in 1/0}$ par exemple)

En réalité, $\vec{V}_{D \in 3/1} = \vec{V}_{C \in 3/1} + \vec{DC} \wedge \vec{\Omega}_{31} = \vec{0} + r\vec{k}_1 \wedge \dot{\gamma}\vec{u}_1 = r\dot{\gamma}\vec{v}_1$



Grâce aux propriétés vues dans ce cours, deux solutions sont plus adaptées :

❑ **Changer de point**

En effet, on peut chercher à passer par un point dont la vitesse est **connue ou plus simple à calculer** : on utilise la propriété du champ de vitesse :

Exemple : Pour calculer $\vec{V}_{G2 \in 2/0}$, on a intérêt à passer par un autre point de la pièce 2 : le ici le point A (« **en amont** » du mécanisme et dont la vitesse sera plus simple à calculer)

$$\vec{V}_{G2 \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 2/0} + \vec{GA} \wedge \vec{\Omega}_{20}$$

❑ **Changer de pièce**

Si la vitesse recherchée est au centre d'une liaison (pivot, rotule,...), on aura intérêt à utiliser la **composition des vitesses** :

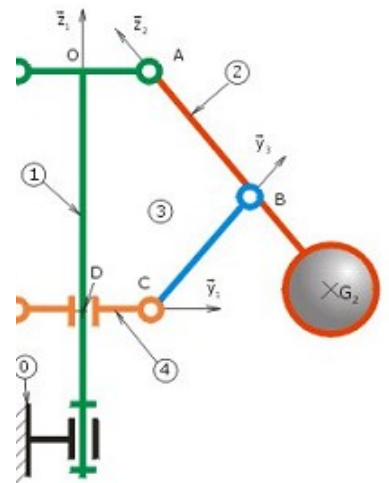
$$\vec{V}_{A \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 2/1} + \vec{V}_{A \in 1/0}$$

soit $\vec{V}_{A \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 1/0}$ car $\vec{V}_{A \in 2/1} = \vec{0}$ (centre de liaison)

On se ramène alors au calcul d'une vitesse **plus simple** et on peut changer à nouveau de point (ou utiliser les méthodes de dérivation) :

$$\vec{V}_{A \in 1/0} = \vec{V}_{O \in 1/0} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{10}$$

soit $\vec{V}_{G2 \in 2/0} = \vec{V}_{A \in 2/0} + \vec{GA} \wedge \vec{\Omega}_{20} = (\vec{V}_{A \in 2/1} + \vec{V}_{A \in 1/0}) + L\vec{k}_2 \wedge (\alpha\dot{i}_2 + \dot{\theta}\vec{k}_1) = -r\dot{\theta}\vec{i}_1 + L\dot{\alpha}\vec{j}_2 - L\dot{\theta}\sin\alpha\vec{i}_1$



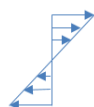
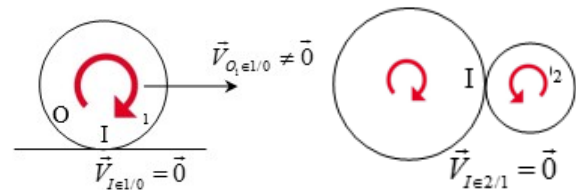
5. ROULEMENT SANS GLISSEMENT (R.S.G.)

Il y a **non-glissement** au contact en I entre deux solides 1 et 2 si la **vitesse de glissement est nulle** au point I de contact :

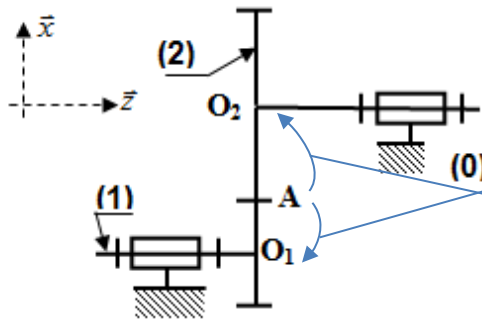
$\vec{V}_{I \in 1/2} = \vec{0}$. On parle de **roulement sans glissement**.

Nota : Dans certains cas, la vitesse de glissement peut ne pas être nulle :

En virage, le roulement sans glissement est valable au milieu du pneu mais il y a glissement vers les extrémités du pneu donc usure :



Exemple : train simple



L'engrènement au point A entre (1) et (2) est un roulement sans glissement d'où : $\vec{V}(A \in 2/1) = \vec{0}$

Et par décomposition $\vec{V}(A \in 1/0) = \vec{V}(A \in 2/0)$ (1)

$$\begin{aligned} \vec{V}(A \in 1/0) &= \vec{V}(O_1 \in 1/0) + A\vec{O}_1 \wedge \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{V}(A \in 2/0) &= \vec{V}(O_2 \in 2/0) + A\vec{O}_2 \wedge \vec{\Omega}(2/0) \end{aligned}$$

soit

$$\begin{cases} \vec{V}(A \in 1/0) = -\frac{D_1}{2} \vec{i} \wedge \omega_{1/0} \vec{k} = \frac{D_1}{2} \cdot \omega_{1/0} \cdot \vec{j} \\ \vec{V}(A \in 2/0) = \frac{D_2}{2} \vec{i} \wedge \omega_{2/0} \vec{k} = -\frac{D_2}{2} \cdot \omega_{2/0} \cdot \vec{j} \end{cases}$$

Remarque : pour l'expression de $\vec{\Omega}(1/0)$ et $\vec{\Omega}(2/0)$, on raisonne en valeurs algébriques $\omega_{1/0}$ et $\omega_{2/0}$: on ne s'occupe pas des sens de rotation des pignons.

En reportant dans l'égalité (1), on obtient la relation : $R = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{D_1}{D_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$ car $D = mZ$ (m module de

l'engrènement). Cette relation sera désormais admise. La démonstration pour une transmission pignon - couronne est identique mais ne fait pas apparaître de signe négatif.

Cette technique consistant à partir « des 2 côtés » vers les centres de liaison se retrouve dans tous les sujets

6. FERMETURE CINEMATIQUE

Il est possible même si cela est souvent laborieux d'écrire une fermeture cinématique :

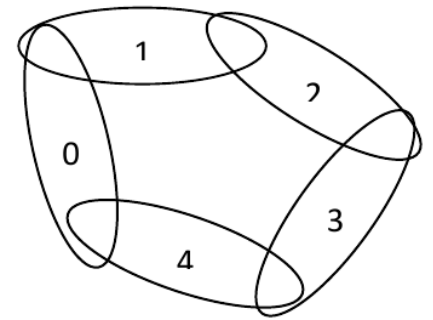
$$\{v_{0/1}\}_O + \{v_{1/2}\}_O + \{v_{2/3}\}_O + \{v_{3/4}\}_O + \{v_{4/0}\}_O = \{0\}_O$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{0/1} \\ \vec{V}_{O \in 0/1} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{1/2} \\ \vec{V}_{O \in 1/2} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/3} \\ \vec{V}_{O \in 2/3} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{3/4} \\ \vec{V}_{O \in 3/4} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{4/0} \\ \vec{V}_{O \in 4/0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Les différentes vitesses sont calculées en un même point avec les techniques vues précédemment.

La résolution est souvent demandée dans un cas particulier qui simplifie la résolution.



7. MOUVEMENT UNIFORMEMENT ACCELERE

Lors d'un mouvement uniformément accéléré, on a les relations suivantes :

En translation :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = a \\ \dot{x}(t) = at + v_0 \\ x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \end{cases}$$

En rotation :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = a \\ \dot{\theta}(t) = at + \omega_0 \\ \theta(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \theta_0 \end{cases}$$

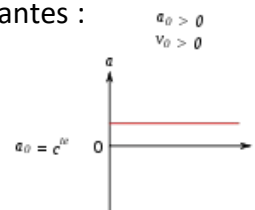
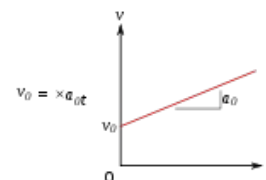
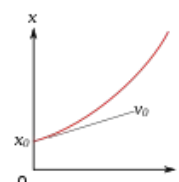
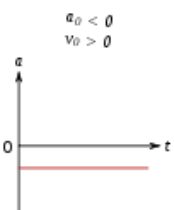
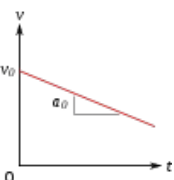
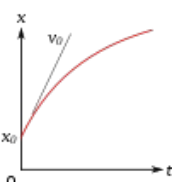
La relation suivante sans le temps peut être utile :

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a \cdot (x_1 - x_0)$$

Conseils : **Travailler en temps relatif** pour chaque phase.

(accélération, vitesse constante, décélération)

Bien traduire toutes les hypothèses du sujet



Exemple : La société OTIS doit installer un ascenseur dans un immeuble de 16 étages (de hauteur 2.5 m chacun). Le cahier des charges impose que le temps de montée (T_m) de l'ascenseur depuis le Rdc jusqu'au 16^{ème} ne doit pas excéder 35s . Sachant que : l'ascenseur accélère et décélère sur 3 étages et que le mouvement s'effectue à vitesse constante V_{max} entre ces phases : Tracer l'allure de l'accélération, la vitesse et la hauteur puis déterminez l'accélération **a** et **Vmax** permettant de satisfaire la condition du Cahier des charges. Réponse : $a = 0.16 \text{ m.s}^{-2}$; $V_{max} = 1.57 \text{ m/s}$