Introduction

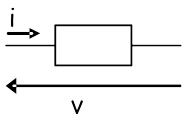
Selon le régime d'étude (transitoire et/ou permanent) et la nature des signaux électriques, la recherche d'une relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie, utilise les mêmes relations (loi d'ohm, d'Henry, des mailles, …) mais sous des formes différentes. Quelques exemples :

- Utilisation des grandeurs instantanées : en régime transitoire (charge et décharge d'un condensateur), montage hacheur, redresseur, modélisation d'une MCC, …
- Utilisation des grandeurs complexes : en régime permanent, filtres, calcul d'une fonction de transfert (en électronique, en asservissement, …),
- Utilisation de grandeurs sinusoïdales : Modélisation d'une machine synchrone ou asynchrone, étude d'un réseau électrique d'alimentation, …

D'où l'importance de connaitre et de savoir utiliser les trois chapitres suivants.

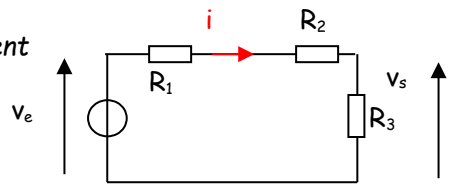
A. Pour des Signaux Quelconques

Soit les caractéristiques courant-tension d'un condensateur, d'une bobine et d'une résistance en respectant le schéma électrique ci contre :

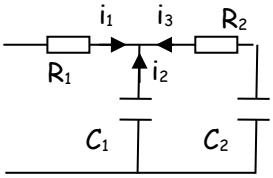


$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \quad (1) \qquad v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad (2) \qquad v_R(t) = R\,i_R(t) \quad (3)$$

Loi des Mailles
(Valable quelque soient les composants)

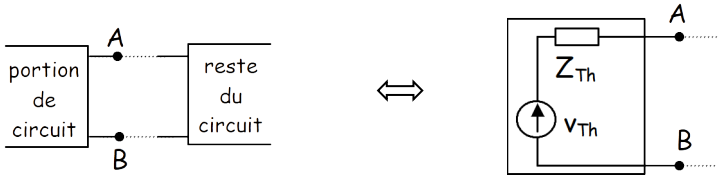


Loi des Noeuds



$$i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$$

Théorème de Thévenin (pour simplifier l'analyse d'un circuit)



Toute portion de circuit contenue entre deux points peut être représentée sous la forme d'un générateur de tension ou de courant (les deux représentations étant équivalentes).

Thévenin

V_{Th} : tension entre A et B (le reste du circuit déconnecté)

Z_{Th} : impédance vue entre A et B, toutes les sources indépendantes de tension étant court-circuitées, et les sources indépendantes de courant étant ouvertes.

En fait Z_{Th} se calcule de la même façon qu'une impédance d'entrée ou de sortie (avec la même remarque concernant les alimentations).

B. Pour des Signaux périodiques

Soit la période T (en s), sa fréquence F = 1/T (en (Hz) et la pulsation $\omega=2\pi F$ (en rd/s)

Impédance complexe Impédance $\underline{Z}=\frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ s'exprime en Ohm (Ω)

C'est une généralisation de la loi d'Ohm à tous les dipôles, résistifs ou non.

L'impédance d'un dipôle résistif est égale à sa résistance. Pour la quasi-totalité des dipôles réels l'impédance est une fonction de la fréquence du régime sinusoïdal

La notation harmonique complexe est un outil qui permet de prendre en compte l'aspect complexe des impédances en régime périodique, sans avoir à passer par les équations différentielles. C'est cette notation que l'on utilise implicitement dans la plupart des calculs sur les circuits linéaires.

avec : $\underline{Z_C(j\omega_0)}=\frac{1}{j2.\pi f_0 C}=\frac{1}{j\omega_0 C}$ $\underline{Z_L(j\omega_0)}=jL\omega_0$ $\underline{Z_R(j\omega_0)}=R$

Z_C, Z_L et Z_R sont les impédances complexes associées à C, L et R. Or Z_C et Z_L :

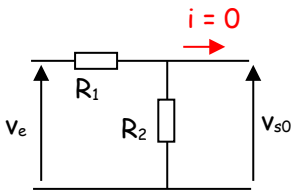
- ont un module dépendant de la fréquence du régime sinusoïdal → l'atténuation de l'amplitude de la tension dépend de la fréquence
- possèdent une partie imaginaire non nulle → déphasage entre tension et courant (+/- π/2).

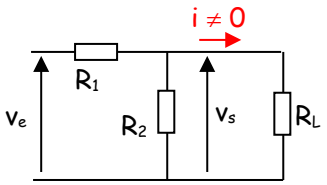
Associations d'impédances complexes

En parallèle : $\frac{1}{\underline{Z_{//}}}=\frac{1}{\underline{Z_1}}+\frac{1}{\underline{Z_2}}$ En série : $\underline{Z_s}=\underline{Z_1}+\underline{Z_2}$

Les relations sont souvent recherchées entre les différentes tensions du circuit. Pour simplifier leur calcul, on utilise alors :

1. le diviseur de tension

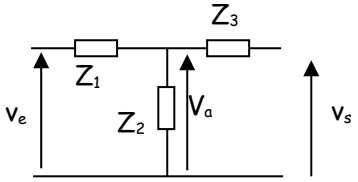




R_1 = 270 Ω
R_2 = 1 kΩ
R_L = 560 Ω

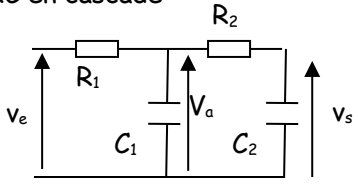
2. Théorème de Millman

Le théorème de Millman est une forme particulière de la loi des nœuds exprimée en terme de potentiel.



$$\underline{v_a}=\frac{\frac{\underline{v_e}}{\underline{Z_1}}+\frac{\underline{v_s}}{\underline{Z_3}}}{\frac{1}{\underline{Z_1}}+\frac{1}{\underline{Z_2}}+\frac{1}{\underline{Z_3}}}$$

Exemple : 2 filtres RC en cascade



Une seconde équation (PdT entre Vs et Va) permet d'obtenir la relation entre Vs et Ve.

$$\underline{v_a}=\frac{\frac{\underline{v_e}}{R_1}+\frac{\underline{v_s}}{R_2}}{\frac{1}{R_1}+jC_1\omega+\frac{1}{R_2}}=\frac{R_2\underline{v_e}+R_1\underline{v_s}}{R_2+j\left(R_2.R_1\right)C_1\omega+R_1}$$

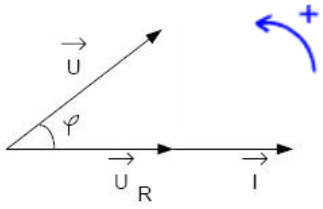
C. Pour des signaux sinusoïdaux

*Il est possible d'utiliser les vecteurs de Fresnel pour représenter ces signaux (**ils sont tous à la même fréquence**).*

A chaque signal $u(t) = U.\sqrt{2}.\sin(\omega.t + \varphi)$ correspond un vecteur $\vec{U}$, de module U et faisant un angle ($\omega t+\varphi$) avec l'axe des x (tous les signaux étant à la même fréquence, ils sont représentés par des vecteurs de Fresnel à l'instant t = 0).

Réaliser une somme de signaux revient à additionner les vecteurs de Fresnel associés. (Cette représentation s'appelle diagramme de Kapp pour le transformateur, de Potier pour l'alternateur, … donc très utilisée).

Représentation de Fresnel



Chaque vecteur de Fresnel est l'image dans le plan complexe d'un nombre complexe :

- *De module V (ou valeur efficace)*
- *Et d'argument ($\omega t+\varphi$)*

La somme des signaux s'effectue simplement en utilisant les règles d'addition des nombres complexes (donc en coordonnées cartésiennes).

Représentation temporelle	*En complexe*	*En complexe simplifié **
$v(t) = V.\sqrt{2}.\sin(\omega.t + \varphi)$	$\underline{V} = V.e^{j(\omega.t+\varphi)}$	$\underline{V} = V.e^{j.\varphi}$
$v(t) = V.\sqrt{2}.\sin(\omega.t)$	$\underline{V} = V.e^{j.\omega.t}$	$\underline{V} = V$
$i(t) = I.\sqrt{2}.\sin(\omega.t - \varphi)$	$\underline{I} = I.e^{j(\omega.t-\varphi)}$	$\underline{I} = I.e^{-j.\varphi}$

** étant donné que tous les signaux sont à la même fréquence.*

D. ETUDE DES FILTRES - DIAGRAMME DE BODE

D'une manière générale, un filtre est un système linéaire dont le rôle est de modifier la composition spectrale d'un signal sans y ajouter de nouvelles composantes.

1. Fonction de transfert

L'analyse de la réponse harmonique d'un filtre revient donc à l'analyse de sa fonction de transfert, qui peut se faire avec un diagramme de Bode

Si $X(j\omega)$ ou $\underline{X}$ et $Y(j\omega)$ ou $\underline{Y}$ sont les notations complexes de x et y en régime sinusoïdal à la pulsation ω_0, le rapport $H(j\omega_0)=\frac{\underline{Y}}{\underline{X}}$ définit également la fonction de transfert, exprimée en fonction de la pulsation. Ce rapport est parfois assez facile à déterminer à l'aide d'un diviseur de tension faisant intervenir des impédances complexes (voir exemples en TP).

2. Diagramme de Bode

2.1. Principe, interprétation

Le diagramme de Bode est une représentation de la fonction de transfert $H(\nu)$ d'un filtre (ou de tout autre grandeur complexe) qui découle assez naturellement des mesures que l'on est amené à faire lors d'une étude expérimentale.

Le module $A(\nu)$ et la phase $\varphi(\nu)$ de la fonction de transfert $H(\nu)$ sont représentés séparément mais selon la même échelle de fréquence.

Il est ainsi très facile d'interpréter un diagramme de Bode : un signal monochromatique de fréquence ν_0 subit lors du passage dans le filtre une amplification de $A(\nu_0)$ et un déphasage de $\varphi(\nu_0)$, valeurs relevées sur le diagramme pour la fréquence ν_0.

2.2. Forme de base du 2nd ordre

a) Description

$$H_3(j\omega) = \frac{k}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

k : gain bande passante m : amortissement

ω_0 : pulsation propre non amortie (rad/s) ($T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$)

b) cas sous-amorti m < 1

Le système est résonant : le module de sa fonction de transfert présente un maximum pour une pulsation ω_R définie par $\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2m^2}$, et ce maximum vaut : $\left|H_3(j\omega_R)\right| = k\frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$

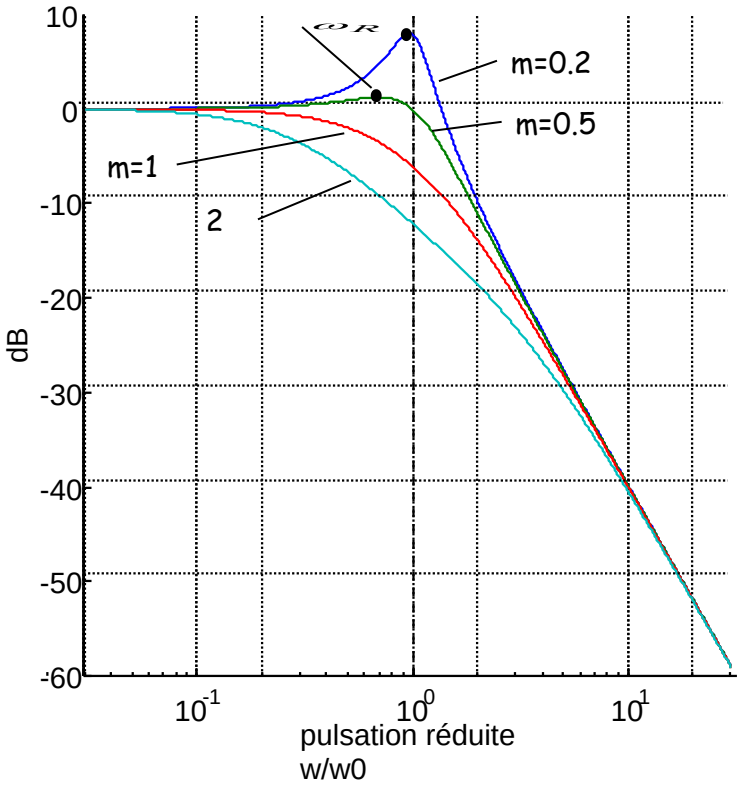
c) cas sur-amorti m > 1

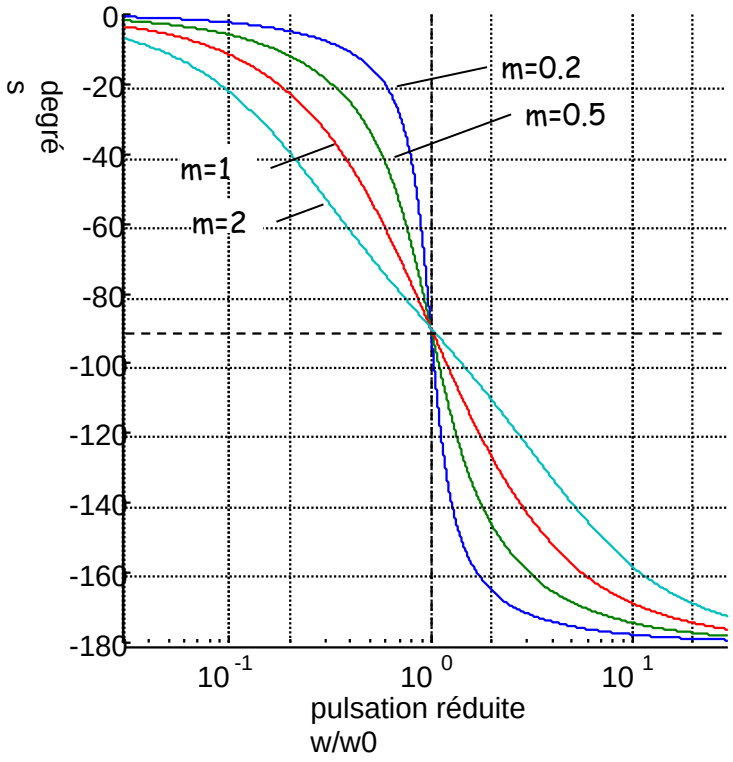
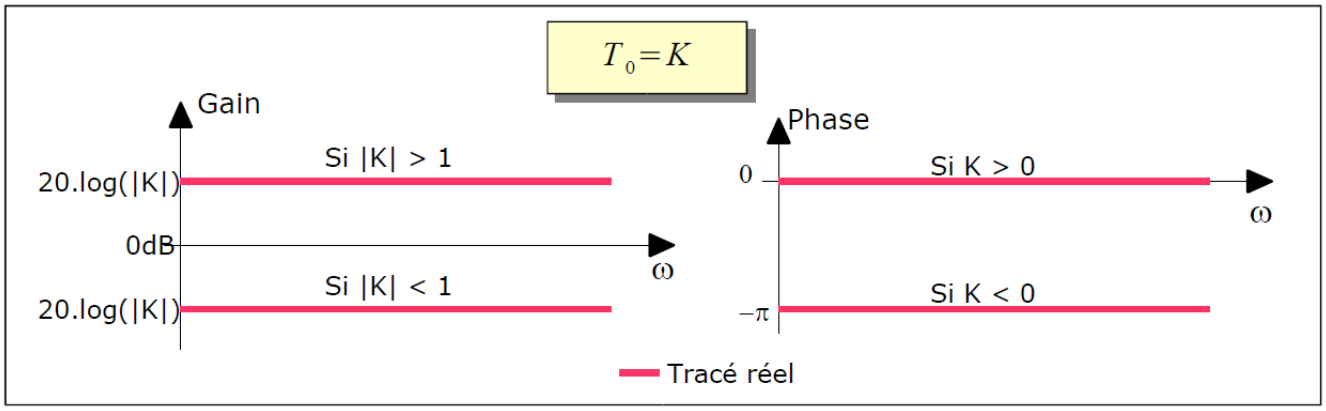
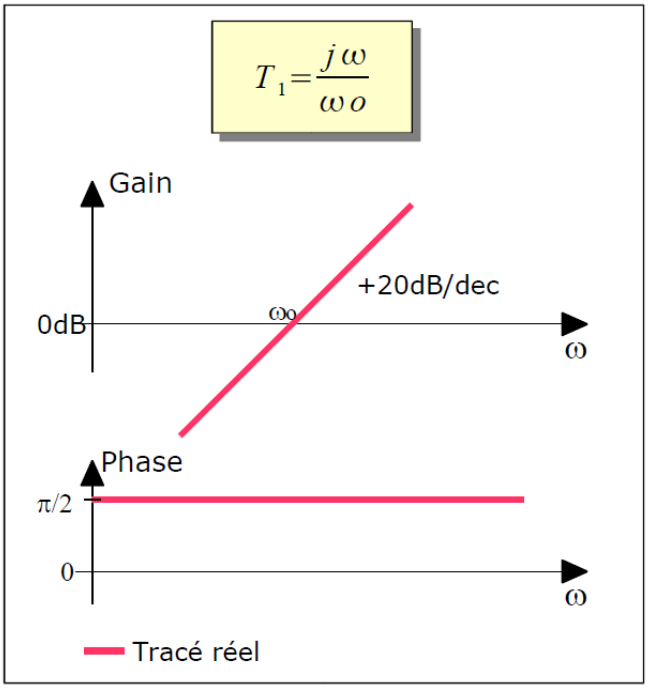
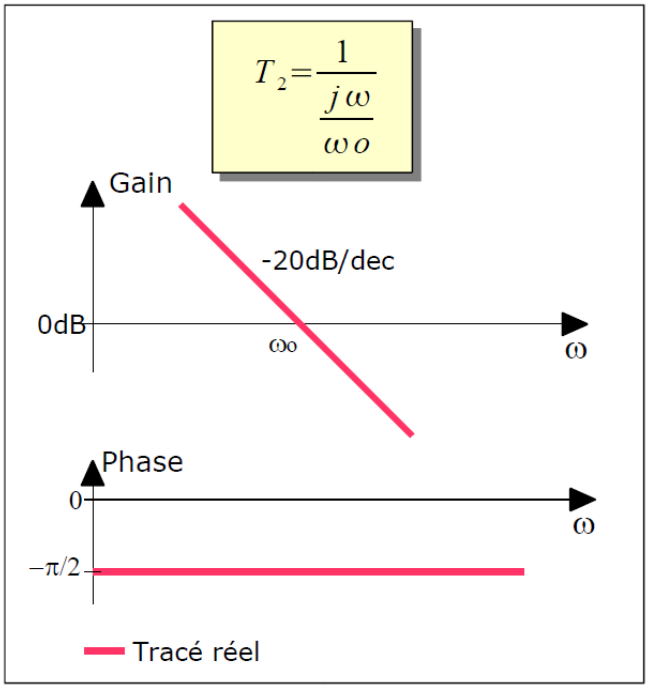
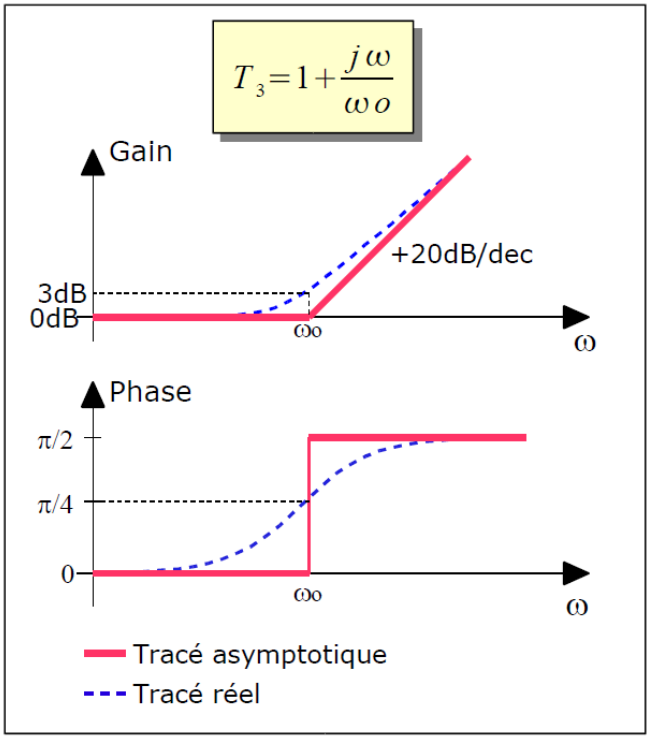
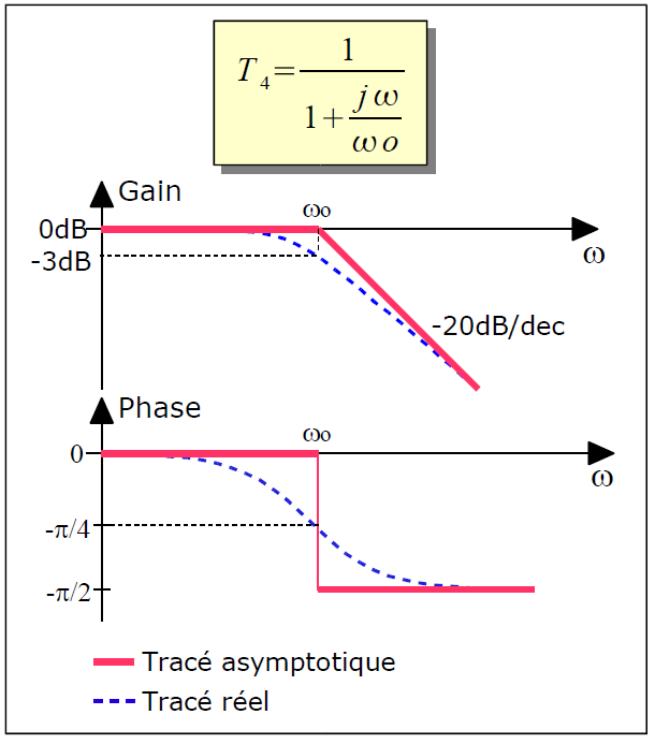
Le dénominateur de H peut être factorisé, on se ramène donc au produit de deux formes du premier ordre :

$$H_3(j\omega) = \frac{k}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

$$\omega_1 = \omega_0\left(m - \sqrt{m^2-1}\right)$$

$$\omega_2 = \omega_0\left(m + \sqrt{m^2-1}\right)$$





2.3. Forme de base du 1er ordre